2020-11-06

TD3

EX1 : ① ✓

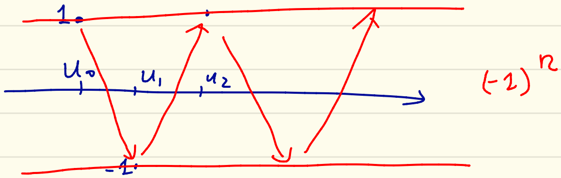
② Faux. eg : $U_n = (-1)^n$.

$U_0 = 1$

$U_1 = -1$

$U_2 = 1$

$U_3 = -1$



U_n est bornée.

mais U_n n'est pas convergente.

③ ✓

④ Faux. $\Rightarrow$ vrai

$\Leftarrow$ Faux

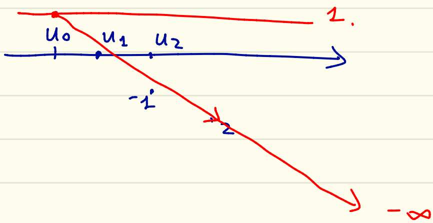
eg : la série de terme général $U_n = \frac{1}{n}$ divergente

mais son terme général $\longrightarrow 0$.

EX2 : ① $U_n = (-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$.

② $U_n = 1 - n$. $n \in \mathbb{N}$.

$U_0 = 1$ $U_1 = 0$ $U_2 = -1$ $U_3 = -2$



U_n est majorée par 1, non minorée.

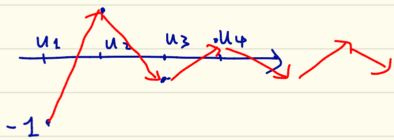
③ $U_n = (-1)^n$.

④ $U_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$. $n \in \mathbb{N}$

$U_1 = -1$

$U_2 = \frac{1}{2}$

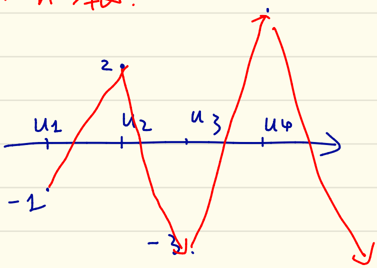
$U_3 = -\frac{1}{3}$. $U_4 = \frac{1}{4}$



$(-1)^n \times \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$.

$(-1)^n \to 1$, -1 ; $\frac{1}{n} \to 0$

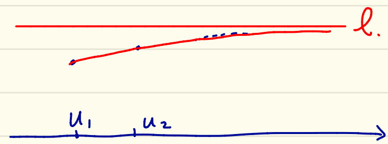
⑤ $U_n = (-1)^n \times n$.



U_n ni minorée ni majorée.

⑥ $u_n = l - \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$

$l \to l$, $\frac{1}{n} \to 0$



$u_1 = l - 1$

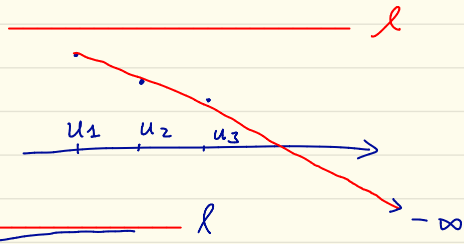
$u_2 = l - \frac{1}{2}$

$u_3 = l - \frac{1}{3}$

$\vdots$

u_n est majorée par l. $\lim_{n \to \infty} u_n = l$.

⑦ $u_n = l - n$.



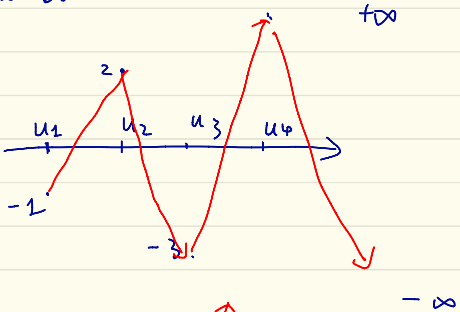
Un est majorée.

non convergente.

⑧ $u_n = l - \frac{1}{n}$.

Un est majorée et minorée, donc Un est bornée.

⑨ $u_n = (-1)^n \times n$.



Un ni minorée ni majorée.

EX3 : ① $u_n = n^2 + 5n$

$u_0 = 0$

$u_1 = 1^2 + 5 = 6$

$u_2 = 4 + 10 = 14$

$\vdots$

Un est minorée par 0. non majorée. ⇒ non bornée.

Un est strictement ↑. ⇒ diverge.

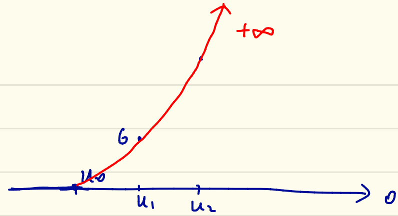
EX3 : ① $u_n = n^2 + 5n$

$u_0 = 0$

$u_1 = 1^2 + 5 = 6$

$u_2 = 4 + 10 = 14$

$\vdots$



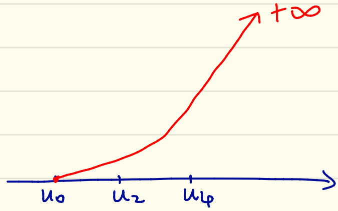
u_n est minorée par 0. non majorée. $\Rightarrow$ non bornée.

$\Downarrow$

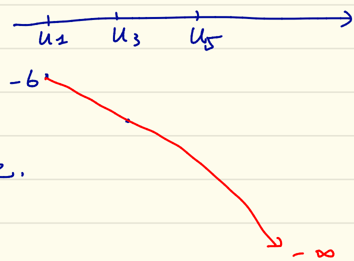
u_n est strictement $\nearrow$. $\Rightarrow$ diverge.

② $u_n = (-1)^n (n^2 + 5n)$

si n paire : $(-1)^n = 1$, donc $u_n = n^2 + 5n$



Si n impaire : $(-1)^n = -1$, donc $u_n = -(n^2 + 5n)$



Donc. u_n est non majorée et non minorée.

$\Rightarrow$ u_n est diverge.

③ $u_n = 1 + \dfrac{1}{1+2n^2} > 1$. pour $n \in \mathbb{N}$.

donc u_n est minorée par 1.

$n \nearrow \Rightarrow 1 + 2n^2 \nearrow \Rightarrow \dfrac{1}{1+2n^2} \searrow$.

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2n^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{1+2n^2} \leq 1 + 1 = 2$$

Donc u_n est majorée par 2.

Donc u_n est bornée.

$\dfrac{1}{1+2n^2} \searrow \Rightarrow u_n \searrow$

minorée + décroissante $\Rightarrow$ u_n convergente.

EX4:

① $U_n = \dfrac{3n-7}{2n+8}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-7 = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+8 = +\infty$ } un forme indéterminée. $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

$$U_n = \frac{3n-7}{2n+8} = \frac{\cancel{n}(3-\frac{7}{n})}{\cancel{n}(2+\frac{8}{n})} = \frac{3-\frac{7}{n}}{2+\frac{8}{n}}$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\frac{7}{n} = 3$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{8}{n} = 2$

Donc. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \frac{3}{2}$.

② $$U_n = \frac{5n^3+27n+8}{4n^2+28} = \frac{n^3(5+\frac{27}{n^2}+\frac{8}{n^3})}{n^2(4+\frac{28}{n^2})} = n \times \frac{5+\frac{27}{n^2}+\frac{8}{n^3}}{4+\frac{28}{n^2}}$$

où $\lim\limits_{n\to\infty}(5+\underset{\downarrow 0}{\frac{27}{n^2}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{8}{n^3}}) = 5$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}(4+\underset{\downarrow 0}{\frac{28}{n^2}}) = 4$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \times \frac{5}{4} = +\infty$

③ $$U_n = \frac{17n+12}{8n^2+15} = \frac{n(17+\frac{12}{n})}{n^2(8+\frac{15}{n^2})} = \frac{17+\frac{12}{n} \to 0}{n(8+\underset{\downarrow 0}{\frac{15}{n^2}})} \longrightarrow \frac{1}{n} \cdot \frac{17}{8} \to 0$$

④ $$U_n = \frac{7-\frac{12}{n^2}\to 0 + \frac{15}{n^3} \to 0}{8+\underset{\downarrow 0}{\frac{5}{n^2}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{5}{n^3}}} \longrightarrow \frac{7}{8}$$

EX5 :

Remarque : (Défi) Deux suites (U_n) , (V_n) sont dites adjacentes

si $(U_n) \nearrow$, $(V_n) \searrow$. et $\lim_{n\to\infty} |U_n - V_n| = 0$.

croissante $\Leftrightarrow$ $U_n \leq U_{n+1}$. $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} - U_n \geq 0$

décroissante $\Leftrightarrow$ $U_n \geq U_{n+1}$ $\Leftrightarrow$ $U_{n+1} - U_n \leq 0$

① Montrer que $(U_n) \nearrow$ $\Leftrightarrow$ montrer que $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$$U_{n+1} - U_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc U_n est croissante $\uparrow$

$$V_{n+1} - V_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{2}{n!}\right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{\overbrace{1-n}^{<0}}{\underbrace{(n+1)!}_{>0}} < 0$$

Donc V_n est décroissante. $\downarrow$

② $$\lim_{n\to\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{2}{n!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

EX 7 :

Remarque : 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites t.q $0 \leq u_n \leq v_n$.

Si $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites t.q $u_n > v_n$

si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$

① $u_n = \frac{2^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ $\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \times 2 \times \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!} \times \cancel{2^n}}$

$= \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3}$. pour $n \geq 2$

Donc $\boxed{u_{n+1} = \frac{2}{n+1} u_n \leq \frac{2}{3} u_n}$ pour $n \geq 2$

$$u_n \leq \frac{2}{3} u_{n-1}$$

$$\frac{2}{3} u_{n-1} \leq \frac{2}{3} u_{n-2} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 u_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} u_3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2$$

$$\Rightarrow u_n + \cancel{\frac{2}{3} u_{n-1}} + \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2}} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} u_3 \leq \cancel{\left(\frac{2}{3}\right) u_{n-1}} + \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_{n-2}} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2$$

$$\Rightarrow u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{2^2}{2!} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times 2$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \rightarrow 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times 2 = 0$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

② $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{(n+1)}}{(n+1)^2} \Big/ \frac{3^n}{n^2} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$= 3\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \geqslant 3 \times \frac{1}{2} \quad \text{pour } n \geqslant 2$$

$\boxed{u_{n+1} \geqslant \frac{3}{2} u_n}$

$$\Rightarrow \quad u_n \geqslant \frac{3}{2} u_{n-1}$$
$$\frac{3}{2} u_{n-1} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^3 u_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} u_3 \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} u_2$$

somme.

$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} u_2 \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u_1 \rightarrow$ Faux, car

$$\Rightarrow u_n + \cancel{\frac{3}{2} u_{n-1}} + \cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2}} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} u_3 \geqslant \cancel{\frac{3}{2} u_{n-1}} + \cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2}} + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} u_2$$

$$\Rightarrow u_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} u_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times \frac{3^2}{2^2}$$

$$= \frac{9}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \rightarrow +\infty \qquad \frac{3}{2} > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque : pourquoi $\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}}$ pour $n \geqslant 2$

$$\Leftarrow \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \geqslant \frac{1}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\Leftarrow \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\max : \ 1+\frac{1}{2} = 1.5 < \sqrt{2}} \leq \sqrt{2}.$$

③ $u_n = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right)^n \geqslant (1+1)^n = 2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

④ $u_n = \sqrt{n^2+4n} - n$

$$= \frac{\sqrt{n^2+4n} - n}{1}$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2+4n} - n)(\sqrt{n^2+4n} + n)}{\sqrt{n^2+4n} + n}$$

on a

$(\sqrt{n^2+4n} - n)(\sqrt{n^2+4n} + n)$

$= (\sqrt{n^2+4n})^2 - n^2$

$= n^2 + 4n - n^2 = 4n$

$$= \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n} + n}$$

$$= \frac{\cancel{n} \times 4}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} + 1\right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}} + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{4}{\sqrt{1} + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

$\frac{4}{n} \to 0$

TD3 2020/11/11

Ex7: (2) $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{3^n} = \frac{3\times \cancel{3^n}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{\cancel{3^n}}$$

$$= 3\times\left(\frac{n}{1+n}\right)^2 \geqslant 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}. \quad \text{pour } n\geqslant 2.$$

Ex7 (1): $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{3}$. pour $n \geqslant 2$

pourquoi $3\times\left(\frac{n}{1+n}\right)^2 \geqslant \frac{4}{3}$. ?

$$3\times\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^2$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\to +\infty$

$1 > \frac{n}{1+n} \uparrow$ si $n \uparrow$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2 > \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n}{1+n}\right)^2 \geqslant \left(\frac{2}{1+2}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\Rightarrow 3\times\left(\frac{n}{1+n}\right)^2 \geqslant 3\times\frac{4}{9} = \frac{4}{3}.$$

Donc : $u_{n+1} \geqslant \frac{4}{3} u_n$. pour $n \geqslant 2$

$u_n \geqslant \frac{4}{3} u_{n-1}$ pour $n \geqslant 3$

$\frac{4}{3} u_{n-1} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2 u_{n-2}$, pour $n \geqslant 4$.

$\vdots$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} u_3 \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} u_2$

$$\Rightarrow u_n \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} u_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} \longrightarrow +\infty$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

TD3:

Ex9: Remarque : $x_n = y_n + \overline{x}_n$

x_n : la sol général de (EC)

y_n : la sol général de (EH)

$\overline{x}_n$: une sol particulière de (EC)

① $x_{n+1} - 2x_n = 3$. $x_0 = 10$

1° L'éq homogène : $\boxed{y_{n+1} - 2y_n = 0}$ $\Rightarrow$ $y_{n+1} = 2y_n = 2\cdot 2y_{n-1} = 2\cdot 2\cdot 2 y_{n-2}$
$= 2^3 y_{n-2}$
$= 2^4 y_{n-3}$
$= 2^{n+1} y_0$

Donc la sol général de (EH) est $\boxed{y_n = 2^n y_0}$

2° Soit c une sol particulière de (EC). on a

$c - 2c = 3 \Rightarrow -c = 3$

$\Rightarrow$ $\underline{c = -3}$

3°: Donc $x_n = y_n + \overline{x}_n = 2^n y_0 + (-3) = 2^n y_0 - 3$

On a $x_0 = 10 = 2^0 y_0 - 3 = y_0 - 3$, donc $y_0 = 13$

Finalement : $x_n = 13 \times 2^n - 3$

② $x_{n+1} - \frac{1}{2} x_n = 3$. $x_0 = 10$

1°: (EH) : $y_{n+1} - \frac{1}{2} y_n = 0 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$

$\Rightarrow$ la sol général de (EH) : $y_n = (\frac{1}{2})^n y_0$

2°: Trouver une sol particulière de (EC)

Soit C une sol particulière de (EC) : $c - \frac{1}{2} c = 3$

$\Rightarrow$ $c = 6$

3°: Donc $x_n = (\frac{1}{2})^n y_0 + 6$

On a $x_0 = (\frac{1}{2})^0 y_0 + 6 = y_0 + 6 = 10$, donc $y_0 = 4$

$\Rightarrow$ $x_n = (\frac{1}{2})^n \times 4 + 6$, pour tout n.

Remarque : Trouver (EH).

$$\underbrace{\underbrace{x_{n+1} = a x_n}_{EH} + A_n}_{EC\ :\ \text{Éq complète}}$$

EH : Équation homogène

EC : Equation complète.

③ $\underbrace{x_{n+1} - \frac{2}{3} x_n}_{\downarrow} = n+3$, $x_0 = 5$

EH : $y_{n+1} - \frac{2}{3} y_n = 0$

étape 1 : (EH) : $y_{n+1} - \frac{2}{3} y_n = 0$ $\Rightarrow$ la sol général de (EH) : $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n y_0$

étape 2 : Trouver une sol particulière de (EC).

Soit $\overline{x_n} = an + b$ une sol particulière de (EC).

$$\overline{x_{n+1}} - \frac{2}{3} \overline{x_n} = n+3$$

$$\overline{x_{n+1}} = a(n+1) + b, \qquad \overline{x_n} = an + b.$$

$$\Rightarrow \quad a(n+1) + b - \frac{2}{3}(an + b) = n+3$$

$$an + a + b - \frac{2}{3}an - \frac{2}{3}b = n+3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \frac{2}{3}a = 1 \\ a + b - \frac{2}{3}b = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = 0$$

Donc, une sol particulière de (EC) est $\overline{x_n} = 3n$

étape 3 : Combine y_n et $\overline{x_n}$

On a $x_n = y_n + \overline{x_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n y_0 + 3n$

On a aussi $x_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 y_0 + 3 \times 0 = y_0 = 5$

Finalement $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 5 + 3n$. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

TD3. Ex9.

(4) : a : $u_n + 2u_{n-1} = 3n^2 + 1$. $u_0 = 1$.

étape 1 : (EH) : $y_n + 2y_{n-1} = 0 \Rightarrow y_n = -2y_{n-1}$

$\Rightarrow y_n = (-2)^n y_0$

étape 2 : Soit $\bar{u}_n = an^2 + bn + c$ une sol particulière de (EC)

Cela donne $\bar{u}_n + 2\bar{u}_{n-1} = 3n^2 + 1$

$\bar{u}_n = an^2 + bn + c$

$\bar{u}_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1) + c = a(n^2 - 2n + 1) + bn - b + c = an^2 + (b-2a)n + a - b + c$

$\Rightarrow an^2 + bn + c + 2(an^2 + (b-2a)n + a - b + c) = 3n^2 + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2a = 3 \rightsquigarrow a = 1 \\ b + 2(b - 2\underset{1}{a}) = 0 \rightarrow 3b - 4 = 0 \\ c + 2(\underset{1}{a} - \underset{\frac{4}{3}}{b} + c) = 1 \rightarrow 3c - \frac{2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4/3 \\ c = 5/9. \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_n = n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{5}{9}$

étape 3 : $u_n = y_n + \bar{u}_n = (-2)^n y_0 + \left(n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{5}{9}\right)$

On a $u_0 = (-2)^0 y_0 + \left(0 + 0 + \frac{5}{9}\right) = 1$

$\Rightarrow y_0 = \frac{4}{9}$

Finalement $u_n = \underbrace{(-2)^n \times \frac{4}{9}} + \underbrace{n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{5}{9}}$

Etudier la limite.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underset{\downarrow \atop +\infty}{n^2}\left((-2)^n \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{4}{9n^2}} + \underset{\downarrow \atop 1}{1} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{4}{3n}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{5}{9n^2}} \right)$$

$(-2)^n$: 1, -2, 4, -8, 16, ...

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas.

b) :

Ex9 : 4 b) : $3u_n - u_{n-1} = 3^n$. $u_0 = 0$.

1° : (EH) : $3y_n - y_{n-1} = 0 \Rightarrow y_n = \left(\frac{1}{3}\right) y_{n-1}$

$\Rightarrow y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n y_0$

2° (EC) : sol particulière.

Soit $\overline{u_n} = a \times 3^n$ une sol particulière de (EC).

$3\overline{u_n} - \overline{u_{n-1}} = 3^n$

$\Rightarrow 3(a \times 3^n) - a \times 3^{n-1} = 3^n$

$\Rightarrow 3a \times 3 \times 3^{n-1} - a \times 3^{n-1} = 3 \times 3^{n-1}$

$\Rightarrow 9a - a = 3$

$\Rightarrow a = \frac{3}{8}$

Donc. $\overline{u_n} = \frac{3}{8} \times 3^n$

3° : $u_n = y_n + \overline{u_n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n y_0 + \frac{3}{8} \times 3^n$

On a $u_0 = y_0 + \frac{3}{8} = 0$, donc $y_0 = -\frac{3}{8}$

Finalement. $u_n = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{8} \times 3^n$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

TD3 . EX 10 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

Soit (U_n) une suite géométrique avec $u_0 = \frac{1}{2}$. et $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \cdots$$

S_n est une série géométrique.

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1 - \cancel{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1.$$